

8) $A \in K^{n \times n}$
 $x \neq 0 \quad K^{n \times 1}$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $A \Rightarrow A =$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = x I_n$$

Λύση: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Άρα $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\text{όπου } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

λ φορές το ίδιο

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = \lambda \\ \lambda_2 = \lambda \\ \vdots \\ \lambda_n = \lambda \end{matrix}$$

Άρα $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

5) Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ διαγωνισμός;

$\begin{vmatrix} A & 0 \\ C & B \end{vmatrix} = A \mid B$

Λύση: $\chi_A(x) = \det(A - I_n X) = \begin{vmatrix} -x & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -x \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} -x & 2 \\ 1 & -x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -x & 3 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

$$\chi_A(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

1ος τρόπος: χ_A είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων

$$1 \leq \dim V(\lambda) \leq 1$$

$$\lambda \in \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

$$1 \leq \text{γεωμ. πολ/τα} \leq \text{αλγεβρ. πολ/τα}$$

Άρα $\dim V(\lambda) = 1$ για κάθε $\lambda \in \{ \quad \}$
 Άρα A διαγωνίσιμος

2ος τρόπος: $m_A(x) \mid \chi_A(x)$ και έχουν τις ίδιες ρίζες
 $m_A(x) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων
 διαφορετικών $\Rightarrow A$ διαγωνίσιμος

) $A \in K^{n \times n}$, λ ιδιοτιμή του A

$$\phi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m$$

$\phi(\lambda)$ ιδιοτιμή του $\phi(A)$

$$V_A(x) \subseteq V_{\phi(A)}(\phi(\lambda))$$

Λέμα: λ ιδιοτιμή του $A \Rightarrow \exists x \neq 0_{n \times 1}$ όπου $Ax = \lambda x$

Έστω $x \neq 0_{n \times 1}$ με $x \in V_A(\lambda) \Rightarrow Ax = \lambda x$

$$\phi(A)x = (a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_m A^m)x$$

$$= a_0 I_n x + a_1 Ax + a_2 A^2 x + \dots + a_m A^m x$$

$$= a_0 x + a_1 \lambda x + a_2 \lambda^2 x + \dots + a_m \lambda^m x$$

$$= (a_0 + a_1 \lambda + a_m \lambda^m) x = \phi(\lambda)x \Rightarrow x \in V_{\phi(A)}(\phi(\lambda))$$

και $\phi(\lambda)$ ιδιοτιμή του $\phi(A)$

• A διαγωνίσιμος $\Rightarrow \phi(A)$ διαγωνίσιμος

$V_A(\lambda) \subseteq V_{\phi(A)}(\phi(\lambda))$ δηλ. κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι και ιδιοδιάνυσμα του $\phi(A)$

A διαγωνίσιμος $\Rightarrow \exists$ βάση $\alpha = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ του $K^{n \times 1}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A

$\vec{a}_i$ ιδιοδιάνυσμα του $A \Rightarrow \vec{a}_i$ ιδιοδιάνυσμα του $\phi(A)$

Άρα η βάση $\alpha = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ του $K^{n \times 1}$ αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του πίνακα $\phi(A) \Rightarrow \phi(A)$ διαγωνίσιμος

• Δώστε ένα παράδειγμα $V_A(\lambda) \neq V_{\phi(A)}(\phi(\lambda))$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ιδιοτιμές } (1, 1 \text{ διτλή})$$

$$V_A(1) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\phi(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$\phi(A) = O_{2 \times 2}$$

$$V_{\phi(A)}(\phi(1)) = V_{O_{2 \times 2}}(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ στο } K^{n \times n}$$

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{\langle (1, 0), (1, 0) \rangle} = \sqrt{5 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1^2 \cdot 0 \cdot 1 + 0} = \sqrt{5}$$

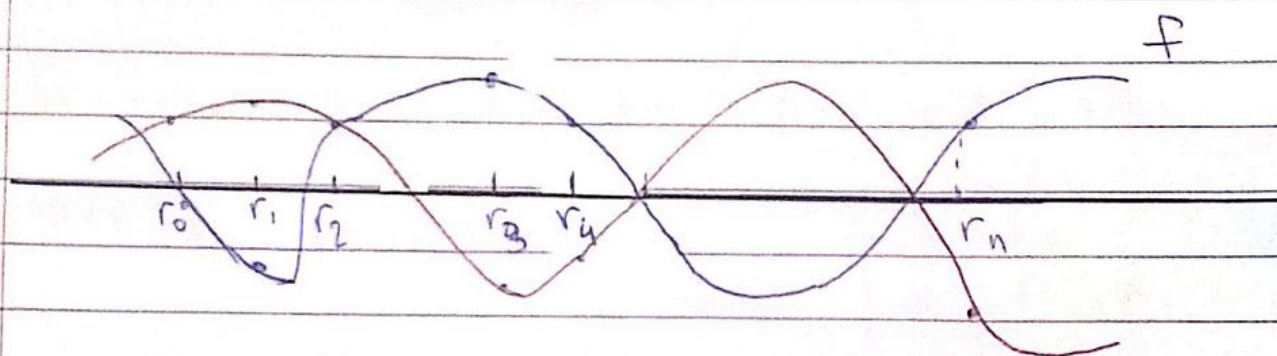
$$\|(0, 1)\| = \sqrt{\langle (0, 1), (0, 1) \rangle} = \sqrt{1} \quad \text{μοναδιαίο}$$

Φυλλάδιο #4

(7) $R_n[x]$ $r_0, r_1, \dots, r_n$ διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί
 $n+1$ (ένα περισσότερο από το βαθμό πολυώνυμου)

$$\langle f, g \rangle = f(r_0)g(r_0) + f(r_1)g(r_1) + \dots + f(r_n)g(r_n)$$

πολυώνυμα το πολύ βαθμού 1



i) Συμμετρικότητα

$$\langle f, g \rangle = f(r_0)g(r_0) + \dots + f(r_n)g(r_n)$$

$$\langle g, f \rangle = g(r_0)f(r_0) + \dots + g(r_n)f(r_n)$$

ii) Διαφορικότητα

$$\langle f_1 + f_2, g \rangle = f_1(r_0) + f_2(r_0) g(r_0) + \dots$$

iii) $\langle f, f \rangle = (f(r_0))^2 + (f(r_1))^2 + \dots + (f(r_n))^2 \geq 0$

Εάν $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f(r_0)^2 + f(r_1)^2 + \dots + f(r_n)^2 = 0$

$$\begin{array}{l|l} f(r_0)=0 \\ f(r_1)=0 \\ f(r_n)=0 \end{array} \rightarrow r_0, r_1, \dots, r_n \text{ ρίζες του πολωνύμου } f$$

που έχει βαθμό $\leq n$, άρα $f=0$

Σίχνα ότι έχει ρίζες άνω του βαθμού
 Η r_0 είναι μια ρίζα άρα μη ρίζες και το πολώνυμο είναι
 η βαθμίδα.

$$2) A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad A^2 + I_2 = O_{2 \times 2}$$

m_A δν είναι διαγωνίσιμος

$$f(x) = x^2 + 1 \quad f(A) = A^2 + I = O \Rightarrow m_A(x) \mid x^2 + 1$$

$x^2 + 1$ αδιάσπαστο στο $\mathbb{R}[x]$

$$m_A(x) \in \{1, x^2 + 1\}$$

→ γιατί όποιον πίνακα και να βάλω σε f κάνει zero I

$$\text{Άρα } m_A(x) = x^2 + 1$$

$m_A(x) = x^2 + 1$: δν είναι γινόμενο γραμμικών (σταθερών) μεταξύ τους). Άρα A δν είναι διαγωνίσιμος

$$\text{Αν } A \in \mathbb{C}^{2 \times 2} \Rightarrow A \text{ διαγωνίσιμος}$$

$$6) \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + 0a_2b_2$$

Δείξτε τις ιδιότητες:

$$\text{i) } \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = 5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{αλλαγή} \\ \text{τοποθεσία} \end{array} \right.$$
$$\langle (b_1, b_2), (a_1, a_2) \rangle = 5b_1a_1 - 2b_1a_2 - 2b_2a_1 + b_2a_2$$

$$\text{ii) } \langle (a_1, a_2) + (b_1, b_2), (x_1, x_2) \rangle = \langle (a_1 + b_1, a_2 + b_2), (x_1, x_2) \rangle$$
$$= 5(a_1 + b_1)x_1 - 2(a_1 + b_1)x_2 - 2(a_2 + b_2)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 =$$
$$= 5a_1x_1 - 2a_1x_2 - 2a_2x_1 + a_2x_2 + 5b_1x_1 - 2b_1x_2 - 2b_2x_1 + b_2x_2 =$$
$$= \langle (a_1, a_2), (x_1, x_2) \rangle + \langle (b_1, b_2), (x_1, x_2) \rangle$$

$$\langle \lambda (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle = \langle (\lambda a_1, \lambda a_2), (b_1, b_2) \rangle =$$
$$= 5\lambda a_1b_1 - 2\lambda a_1b_2 - 2\lambda a_2b_1 + \lambda a_2b_2 =$$
$$= \lambda (5a_1b_1 - 2a_1b_2 - 2a_2b_1 + a_2b_2) =$$
$$= \lambda \langle (a_1, a_2), (b_1, b_2) \rangle$$

Συμπληρωματικά

→ δένω ένα το δένω
κόπια

$$\begin{aligned}\text{iii)} \quad \langle (a_1, a_2), (a_1, a_2) \rangle &= 5a_1^2 - 2a_1a_2 - 2a_2a_1 + a_2^2 \\&= 5a_1^2 - 4a_1a_2 + a_2^2 \\&= a_1^2 + 4a_1^2 - 2(2a_1)a_2 + a_2^2 \\&= a_1^2 + (2a_1 - a_2)^2 \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Έστω ότι } \langle (a_1, a_2), (a_1, a_2) \rangle &= 0 \Rightarrow \\a_1^2 + (2a_1 - a_2)^2 &= 0 \Rightarrow \underline{a_1 = 0} \text{ και } \underline{2a_1 - a_2 = 0} \\&\Rightarrow \underline{a_2 = 0} \\&\Rightarrow (a_1, a_2) = (0, 0)\end{aligned}$$

Αρα είναι δένω επίσημα. Τελικά είναι ένω. ημ

Πρόβλημα #3

① $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$T(x, y, z, w) = (3x + ay + bz + cw, 3y + dz + ew, 4z + 4w, 4w)$$

Βρείτε τα $a, b, \dots$ ώστε T διαγωνισίμ

Λύση: $[T]_e^e = \begin{pmatrix} 3 & a & b & c \\ 0 & 3 & d & e \\ 0 & 0 & 4 & f \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ε κανονική $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_4) = \begin{vmatrix} 3-x & a & b & c \\ 0 & 3-x & d & e \\ 0 & 0 & 4-x & f \\ 0 & 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3-x)^2 (4-x)^2$$

Ιδιότητες 3(διπλή), 4(διπλή)

A διαγώνιος $\Rightarrow \dim V_A(3) = 2$ ↗ γεωμ. πολ/τα
 $\dim V_A(4) = 2$

$$V_A(3) = \{x \in \mathbb{R}^{4 \times 1} \mid (A - 3I)x = 0\}$$

Ξέρω ότι $2 = \dim V_A(3) = 4 - \text{rank}(A - 3I)$
↓
 μέγιστος αριθμός
 γραμ 4x4 μη μηδεν

$$\text{rank}(A - 3I) = 2$$

Όμοια $\text{rank}(A - 4I) = 2$

A διαγώνιος $\Rightarrow \text{rank}(A - 3I) = 2$ ①
 $\text{rank}(A - 4I) = 2$ ②

$$\textcircled{1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 - cr_4 \\ r_2 - er_4 \\ r_3 - fr_4 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_1 - br_3 \\ r_2 - dr_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} r_2 \leftrightarrow r_3 \\ r_3 \leftrightarrow r_4 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Γu $\text{rank}(A - 3I) = 2 \Rightarrow a = 0$

Γu $a \neq 0 \quad \text{rank}(A - 3I) = 3$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & a & b & c \\ 0 & -1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -r_1 \\ -r_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -a & -b & -c \\ 0 & 1 & -d & -e \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Γu $f = 0 \Rightarrow \text{rank}(A - 4I) = 2$

Γu $f \neq 0 \Rightarrow \text{rank}(A - 4I) = 3$

'Apa A diagonalisabel or $\text{rank}(A - 3I) = \text{rank}(A - 4I)$

2

ja $f = 0$ dan $a = 0$

② $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (2x, 2y + az, 3x + bz)$$

Βρείτε τα a, b ώστε T διαγώνιστη

$$[T]_e^e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix} = A$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \nwarrow \\ T(1,0,0) & T(a,1,0) & T(0,0,1) \end{matrix}$

$$\chi_A(x) = \det(A - xI_3) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 2-x & a \\ 3 & 0 & b-x \end{vmatrix} =$$

$$(2-x)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2-x & a \\ 0 & b-x \end{vmatrix}$$

$$= (2-x)(2-x)(b-x) = (2-x)^2(b-x)$$

i) $b=2$ 2 ζερότητες πύλα

ii) $b \neq 2$ 2 διαφορετικές πύλες

i) $b=2$: $\dim V_A(2) = 3$

$\begin{matrix} \nearrow & \nwarrow \\ \text{βασμ.} & \text{αδχ} \\ \text{πολ/τα} & \text{πολ/τα} \end{matrix}$

$$V_A(2) = \{x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mid (A - 2I)x = 0\}$$

Η διαίσθηση των χώρων των λύσεων ενός ομογενούς συστήματος $Bx=0$ είναι ίδια με το πλήθος των αγνώστων μείον των βαθμίδων του πίνακα

$$3 = \dim V_A(2) = 3 - \text{rank}(2I - A) \Rightarrow$$

$$\text{rank}(A - 2I) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{pmatrix} = 0$$

Άρα, άρα αν $b=2$ ο πίνακας A δεν είναι διαγώνιος

ii) $b \neq 2$: $\dim V_A(2) = 2$

$$V_A(2) = \{x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} / (A - 2I)x = 0\}$$

$$2 = \dim V_A(2) = 3 - \text{rank}(A - 2I) \Rightarrow$$

$$\text{rank}(A - 2I) = 1 \Rightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & b-2 \end{pmatrix} = 0 \quad r_3/3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{b-2}{3} \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a=0$$

Συμπέρασμα: A διαγώνιος $\Rightarrow a=0, b \neq 2$